**Teorema:** Si m no es un cuadrado perfecto, entonces \sqrt{m} es un número irracional.

Demostración:

Como m no es un cuadrado perfecto, entonces \sqrt{m} no es un número entero, por lo que es racional (no entero) o irracional. Esto significa que podemos encontrar un número entero n tal que \sqrt{m} se encuentra entre n  y n+1 :

n < \sqrt{m} < n+1

**Lo que vamos a demostrar es que a=\sqrt{m}-n es irracional** (lo que, sabiendo que n es un número entero, implicaría que \sqrt{m} también es irracional).

**Supongamos que a no es irracional**. Por su propia definición, se tiene que  0 < a < 1, por lo que, si no es irracional, será de la forma:

a=\cfrac{p}{q}

con  0 < p < q. **Podemos asumir sin ningún problema que q es lo más pequeño posible**. Si tomamos la fracción inversa y operamos un poco obtenemos lo siguiente:

\cfrac{q}{p}=\cfrac{1}{a}=\cfrac{1}{\sqrt{m}-n}=

Multiplicamos ahora numerador y denominador por el conjugado del denominador actual,\sqrt{m}+n, y seguimos operando:

=\cfrac{\sqrt{m}+n}{\sqrt{m}+n} \cdot \cfrac{1}{\sqrt{m}-n}=\cfrac{\sqrt{m}+n}{m-n^2}=\cfrac{a+2n}{m-n^2}

Hemos llegado a la siguiente igualdad:

\cfrac{q}{p}=\cfrac{a+2n}{m-n^2}

Ahora despejamos a:

a=\cfrac{q \cdot (m-n^2)}{p}-2n=\cfrac{q \cdot (m-n^2)-2np}{p}=\cfrac{k}{p}

Acabamos de obtener que a se puede expresar mediante una fracción cuyo denominador p, es más pequeño que el denominador anterior, q (por definición p era menor que q). Pero eso es imposible, ya que habíamos supuesto que q era el menor denominador posible.

**Esta contradicción proviene del hecho de suponer que a=\sqrt{m}-n es un número racional**. En consecuencia, a **es irracional**, lo que implica que \sqrt{m} también es un número irracional.